

DM de mathématiques n°3

Fonctions usuelles – Corrigé

/26 Exercice 1 : des fonctions gentilles

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right).$$

On va montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

/1 1) a) Déterminer le domaine de définition D de f et g .

Pour la fonction f , $\arctan$ et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ par composition.

Pour la fonction g , ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\operatorname{sh}x}{1 + \operatorname{ch}x}$ a un sens car $1 + \operatorname{ch}(x) \geq 2 > 0$. Par composition, g est définie sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\boxed{D = \mathbb{R}}$

- 0,5 pour deux précisions parmi : $\arctan$ et/ou sh et/ou ch sont définies sur $\mathbb{R}$ et $1 + \operatorname{ch}x \neq 0$
- 0,5 pour la réponse $D = \mathbb{R}$.

/4 b) Montrer que f et g sont dérivables sur D . Calculer f' et g' .

f et g sont dérivables (sur D) comme composition et quotient de fonctions dérivables (sur D). Pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2 x} \operatorname{ch}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \operatorname{ch}x = \boxed{\frac{1}{2\operatorname{ch}x}}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{sh}x}{1 + \operatorname{ch}x}\right)^2} \times \frac{\operatorname{ch}x(1 + \operatorname{ch}x) - \operatorname{sh}^2 x}{(1 + \operatorname{ch}x)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + \operatorname{ch}x)^2 + (\operatorname{sh}x)^2} \times (\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) \\ &= \frac{1}{1 + 2\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} \times (\operatorname{ch}x + 1) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1 + 2\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}^2 x + (\operatorname{ch}^2 x - 1)} \times (\operatorname{ch}x + 1) \\ &= \frac{1}{2\operatorname{ch}x + 2\operatorname{ch}^2 x} \times (\operatorname{ch}x + 1) \\ &= \boxed{\frac{1}{2\operatorname{ch}x}} \end{aligned}$$

- 0,5 pour justifier que les fonctions sont dérivables
- 1 pour le calcul de $f'(x)$
- 2,5 pour le calcul de $g'(x)$

/2,5 c) En déduire le résultat voulu.

Par la question précédente, $f' = g'$, ou encore $(f - g)' = 0$. Comme $D = \mathbb{R}$ est un **intervalle**, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $f - g = C$. Pour montrer que $f = g$, il suffit de montrer que $C = 0$. Or,

$$C = f(0) - g(0) = \frac{1}{2} \arctan(0) - \arctan\left(\frac{0}{1 + 1}\right) = 0 - 0 = 0$$

Ainsi, $\boxed{f = g}$.

- 1 pour $(f - g)' = 0$ et donc $f - g$ est constante
- 0,5 pour avoir dit que $\mathbb{R}$ était un intervalle
- 1 pour montrer que $C = 0$, et la conclusion $f = g$

/1 2) a) Rappeler le domaine de définition E de la fonction $\tan$.

$$\boxed{E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}} \quad \left(\text{ou bien } \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right) \right)$$

- 1 pour la bonne réponse. Si l'ensemble est mal écrit, -0,5.

/2 b) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2f(x) \in E$. Pour x dans D , calculer $\tan(2f(x))$.

Soit $x \in D$. On a $2f(x) = \arctan(\operatorname{sh}x)$. Or, $\arctan(\mathbb{R}) = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, donc $2f(x) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\subset E$. Ainsi, $\boxed{2f(x) \in E}$, et

$$\tan(2f(x)) = \tan(\arctan(\operatorname{sh}x)) = \boxed{\operatorname{sh}x}$$

(car $\tan \circ \arctan = \text{id}_{\mathbb{R}}$)

- 1 pour justifier que $2f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- 1 pour le calcul de $\tan(2f(x))$

c) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{1 + \text{ch}(x)}$ est à valeurs dans $] -1, 1[$.

On sait que $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$ est à valeurs dans $] -1, 1[$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \frac{|\text{sh}x|}{1 + \text{ch}x} \\ &\leq \frac{|\text{sh}x|}{\text{ch}x} \\ &= |\text{th}x| < 1 \end{aligned}$$

on en déduit que $\boxed{h(x) \in] -1, 1[}$. Note : on pouvait aussi faire une étude de fonctions...

d) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2g(x) \in E$. Pour x dans D , calculer $\tan(2g(x))$.

Par la question (c), on a pour tout $x \in D$

$$\begin{aligned} -1 &< h(x) < 1 \\ \implies -\frac{\pi}{4} &< \arctan(h(x)) = g(x) < \frac{\pi}{4} && \text{par stricte croissance de } \arctan \\ \implies -\frac{\pi}{2} &< 2g(x) < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Alors, comme $g(x)$ et $2g(x)$ sont dans E , on a :

$$\begin{aligned} \tan(2g(x)) &= \frac{2 \tan(g(x))}{1 - \tan^2(g(x))} && (\text{formule } \tan(2a) \text{ avec } 2a \in D_{\tan}) \\ &= \frac{2 \frac{\text{sh}x}{1 + \text{ch}x}}{1 - \left(\frac{\text{sh}x}{1 + \text{ch}x}\right)^2} \\ &= \frac{2\text{sh}x(1 + \text{ch}x)}{(1 + \text{ch}x)^2 - \text{sh}^2x} \\ &= \frac{2\text{sh}x + 2\text{sh}x\text{ch}x}{1 + 2\text{ch}x + \text{ch}^2x - \text{sh}^2x} \\ &= 2\text{sh}x \frac{1 + \text{ch}x}{2 + 2\text{ch}x} \\ &= \boxed{\text{sh}x} \end{aligned}$$

- 1 pour la justification “par stricte croissance de $\arctan$ ”
- 1 pour justifier que $2g(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- 0,5 pour dire que $g(x)$ et $2g(x)$ sont dans E
- 2 pour le calcul de $\tan(2g(x))$

e) En déduire le résultat voulu.

Soit $x \in D$. Par les questions (c) et (d), on a

$$\begin{aligned} \tan(2f(x)) &= \tan(2g(x)) \\ \implies \arctan(\tan(2f(x))) &= \arctan(\tan(2g(x))) \\ \implies 2f(x) &= 2g(x) && \text{car } 2f(x), 2g(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \implies f(x) &= g(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f = g}$.

Note : on peut aussi utiliser le fait que $\tan a = \tan b \iff a \equiv b \pmod{\pi}$.

- 1,25 pour la justification “car $2f(x)$ et $2g(x)$ sont dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ”
- 1,25 pour le reste

3) Application :

a) Calculer $\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.

$$\begin{aligned} \text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) &= \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} + e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} && \text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} - e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 + 1}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}} && = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 - 1}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

— 1 par calcul

b) En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On pose $x = \frac{1}{2} \ln 3$. Alors, par la question a),

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh} x) &= \arctan\left(\frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} &= \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 2}\right) \\ \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 2}\right)\right) \\ \Rightarrow \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{3} + 2}} \end{aligned}$$

/6 Exercice 2 : des fonctions méchantes

On veut montrer l'identité suivante :

$$\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12} \right)$$

/2 1) Montrer que $\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}$.

$$\begin{aligned} &\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \right) \\ &= \sin \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) \cos \left(\arcsin \frac{1}{4} \right) + \cos \left(\arcsin \frac{1}{3} \right) \sin \left(\arcsin \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{15}{16}} + \sqrt{\frac{8}{9}} \times \frac{1}{4} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{15}}{12} + \frac{\sqrt{8}}{12}} \end{aligned}$$

/2,5 2) Montrer que $\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4}$.

Par **croissance** de $\arcsin$, on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow \arcsin 0 \leq \arcsin \frac{1}{3} \leq \arcsin \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 0 \leq \arcsin \frac{1}{3} \leq \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

De même, on montre que $\arcsin \frac{1}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{6} \right]$. D'où :

$$0 \leq \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \leq 2 \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

donc en particulier $\boxed{\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]}$.

/1,5 3) Conclure.

On a vu en question 1) que :

$$\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}$$

D'où :

$$\arcsin \left(\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \right) \right) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12} \right)$$

Puisque $\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, on en déduit finalement

$$\boxed{\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12} \right)}$$